

Γενική μορφή δεύτεροβάθμιας εξίσωσης

$$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \}$$

Θα μελετήσω το A ως προς το σχήμα του.

π.χ.
 $\rightarrow a=b=c=0$ Το A είναι ευθεία

V π.χ.

$f: V \rightarrow V$ γραμμική αν $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u, v \in V$ και

$$f(\lambda u) = \lambda f(u) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, u \in V$$

Έστω $W \subseteq V$. Ο W λέγεται αναλλοίωτος ως προς f αν

$$f(W) \subseteq W$$

Ειδική περίπτωση είναι οι αναλλοίωτοι υπόχωροι διάστασης 1
($\dim V = 1$)

π.χ.

$$u \in W \Rightarrow f(u) \in W = \langle u \rangle, \quad u \neq 0$$

$$f(u) = \lambda u \quad \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1) Έστω V δ.χ. και $f: V \rightarrow V$ γραμμική συνάρτηση. Ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ ονομάζεται ιδιοτιμή της f αν υπάρχει $u \in V, u \neq 0$ τ.ω $f(u) = \lambda u$
- 2) Ένα $u \in V \setminus \{0\}$ για το οποίο $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ τ.ω $f(u) = \lambda u$ ονομάζεται ιδιοδιάνυσμα της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ .
- 3) Το σύνολο $V(\lambda) = \{u \in V : u \text{ ιδιοδιάνυσμα της } f \text{ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή } \lambda\}$ ονομάζεται ιδιοχώρος της f που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ

ΠΡΟΤΑΣΗ

Το $V(\lambda)$ είναι διανυσματικός χώρος

Απόδειξη

Έστω $u_1, u_2 \in V(\lambda)$. Τότε έχω $f(u_1) = \lambda u_1$
 $f(u_2) = \lambda u_2$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f(u_1 + u_2) &\stackrel{f \text{ γραμμική}}{=} f(u_1) + f(u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 = \lambda(u_1 + u_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow u_1 + u_2 \in V(\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall \mu \in \mathbb{R} \quad u \in V &\Rightarrow f(\mu u) \stackrel{f \text{ γραμμική}}{=} \mu f(u) = \mu(\lambda u) = \lambda(\mu u) \Rightarrow \mu u \in V(\lambda) \end{aligned}$$

Άρα $V(\lambda)$ είναι δ.χ.

$$V = \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$(a_1 \quad a_2)$$

$$A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$f(x) = xA, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Η f είναι γραμμική αφού έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$\text{Έψω } f(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2) \cdot A = x_1 A + x_2 A = f(x_1) + f(x_2)$$

$$\text{και για τυχαίο } \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^{1 \times 2} : f(\mu x) = (\mu x) A = \mu(xA) = \mu f(x)$$

Γνωρίζουμε ότι (Τα παραπάνω τα χρησιμοποιούμε για να δώσουμε γραμμική)

$$B_1, B_2, B_3 \quad \mu \in \mathbb{R} \quad B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu} \quad \text{και } B_3 \in \mathbb{R}^{\nu \times \mu} \quad \text{όπου } \mu, \nu \in \mathbb{N}$$

$$(B_1 + B_2) \cdot B_3 = B_1 B_3 + B_2 B_3$$

$$\text{Επειδή } B_1 \in \mathbb{R}^{\mu \times \nu}, B_2, B_3 \in \mathbb{R}^{\nu \times \mu}$$

$$B_1 (B_2 + B_3) = B_1 B_2 + B_1 B_3$$

$$\text{Επίσης } (AB_1) B_2 = A(B_1 B_2) = B_1 (AB_2)$$

$$\text{Έστω } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} : f(x) = xA$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Έστω ότι f έχει ένα ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$

Τότε $\exists u \in \mathbb{R}^{1 \times 2} : f(u) = \lambda u^{(2)}$ και $u \neq 0$.

Αλλά $u \in \mathbb{R}^{1 \times 2} : u = (u_1, u_2)$ όπου $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$

$$\text{Έχουμε } f(u) = u \cdot A = (u_1, u_2) \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 u_1 + a_3 u_2 \quad a_2 u_1 + a_4 u_2) \quad (2)$$

$$\text{Επίσης } \lambda u = (\lambda u_1 \quad \lambda u_2) \quad (3)$$

(2)

$$\text{Από (2), (2), (3) έχουμε: } \left. \begin{aligned} a_1 u_1 + a_3 u_2 &= \lambda u_1 \\ a_2 u_1 + a_4 u_2 &= \lambda u_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} (a_1 - \lambda) u_1 + a_3 u_2 &= 0 \\ a_2 u_1 + (a_4 - \lambda) u_2 &= 0 \end{aligned}$$

Θέλουμε να παραστήσουμε εύκολα σαν ομογενές γραμμικό σύστημα με 2 αγνώστους τα u_1, u_2 τότε έχει μια μη-μηδενική λύση το (u_1, u_2) άρα έχει ορίζουσα 0

$$\text{Αντικαθιστώντας } \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1 - \lambda & a_3 \\ a_2 & a_4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_1 - \lambda)(a_4 - \lambda) - a_3 a_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1 a_4 - a_1 \lambda - a_4 \lambda + \lambda^2 = a_2 a_3 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a_1 + a_4) \lambda + (a_1 a_4 - a_2 a_3) = 0$$

χαρακτηριστικό
πολυώνυμο

$$\text{Άρα } \det(A - \lambda I) = 0$$

Μας ενδιαφέρει η περίπτωση που έχουμε 2 διαφορετικές
ιδιοτιμές λ_1, λ_2 με $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Έχουμε 2 ιδιοχώρους $V(\lambda_1), V(\lambda_2)$
Έστω $u \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2)$. Τότε έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} f(u) = \lambda_1 u \\ f(u) = \lambda_2 u \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda_1 u = \lambda_2 u \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) u = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ (αφού } \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{)}$$

Άρα $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{0\} \Rightarrow$ το άθροισμα $V(\lambda_1) + V(\lambda_2)$ είναι εαδύ

$$\left. \begin{array}{l} \dim V(\lambda_1) \geq 1 \\ \dim V(\lambda_2) \geq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) \geq 2$$

$$\text{Ακόμα } V(\lambda_1) + V(\lambda_2) \subseteq \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

Επειδή το άθροισμα είναι εαδύ από την επίθεση των διαστάσεων
έχουμε $\dim(V(\lambda_1) + V(\lambda_2)) = \dim V(\lambda_1) + \dim V(\lambda_2) \geq 2$

$$\text{Αλλά } V(\lambda_1) + V(\lambda_2) \text{ υποχώρος του } \mathbb{R}^{1 \times 2} \Rightarrow \underline{V(\lambda_1) + V(\lambda_2) = \mathbb{R}^{1 \times 2}}$$

Τα διανύσματα $V(\lambda_1), V(\lambda_2)$ τα μη-μηδενικά είναι γραμμικά
ανεξαρτήτως.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Λαμβάνω ως } u_1 \in V(\lambda_1), u_1 \neq 0 \text{ και } u_2 \in V(\lambda_2), u_2 \neq 0 \\ \text{τότε τα } u_1, u_2 \text{ είναι γρ. ανεξ.} \end{array} \right)$$

$$\text{Έστω } p^{(1)} = (p_1 \ p_2) \in V(\lambda_1) \quad p^{(1)} \neq 0$$

$$p^{(2)} = (p_3 \ p_4) \in V(\lambda_2) \quad p^{(2)} \neq 0$$

$$\text{Τα } p^{(1)}, p^{(2)} \text{ είναι γρ. ανεξ.} \quad P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^{(1)} \\ p^{(2)} \end{pmatrix}$$

Φαίνεται πως είναι πιθανό από τα $p^{(1)}, p^{(2)}$ με ένα κατάλληλο τρόπο.

$$\text{Η κρίσιμη } \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ άρα } p^{(1)}, p^{(2)} \text{ είναι γρ. ανεξάρτητα.}$$

Άρα ο P είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists P^{-1}$

$$P \cdot A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 p_1 + a_3 p_2 & a_2 p_1 + a_4 p_2 \\ a_1 p_3 + a_3 p_4 & a_2 p_3 + a_4 p_4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 p_1 & p_1 p_2 \\ \lambda_2 p_3 & p_2 p_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Το $p^{(1)} \in V(\lambda_1)$ ικανοποιεί το (2) για την ιδιοτιμή λ_1

$$\Rightarrow \begin{aligned} a_1 p_1 + a_2 p_2 &= \lambda_1 p_1 \\ a_2 p_3 + a_4 p_2 &= \lambda_1 p_2 \end{aligned}$$

Ομοίως $p^{(2)} \in V(\lambda_2)$ ικανοποιεί το (2) για την ιδιοτιμή λ_2

~~$a_1 P_3 + a_2 P_4 = \Delta_1 P_3$~~

$$a_1 P_3 + a_2 P_4 = \Delta_1 P_3 \quad (5)$$

$$a_2 P_3 + a_4 P_4 = \Delta_2 P_4 \quad (6)$$

Από ως $(1), (2), (3), (4), (5), (6)$ έχω ότι $P \cdot A = \Delta \cdot P \Rightarrow$

$$\Rightarrow (P \ A) P^{-1} = (\Delta P) P^{-1} \rightarrow PAP^{-1} = \Delta (PP^{-1}) \Rightarrow PAP^{-1} = \Delta \cdot I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{PAP^{-1} = \Delta}$$

Συμμετρικοί Πινάκες (Αρχημορικοί) Αν $A = A^T$

όπου A^T αντιστροφή του A

$$\text{Έστω } A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad a_2 \neq 0 \quad \left(a_3 \rightarrow a_2, \quad a_4 \rightarrow a_3 \right)$$

$$\text{Αν } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda^2 - (a_1 + a_3)\lambda + (a_1 a_3 - a_2^2) = 0$$

$$f_A: \mathbb{R}^{1 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad \mu \in f_A(x) = xA \quad \forall x \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

χαρακτηριστικό
πολυώνιο της f_A
και του A

$$\Delta_{\text{αριθμητικό}} \Delta = \left(-(a_1 + a_3) \right)^2 - 4 \cdot 1 (a_1 a_3 - a_2^2) =$$

$$= a_1^2 + a_3^2 + 2a_1 a_3 - 4a_1 a_3 + 4a_2^2 = (a_1 - a_3)^2 + 4a_2^2 > 0 \quad (\text{αφαι } a_2 \neq 0)$$

Αρα το χαρακτηριστικό πολυώνιο ~~είναι~~ ενός συμμετρικού
πίνακα έχει 2 διαφορετικές πραγματικές ρίζες

Έστω $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

Άρα τα ιδιοδιανύσματα των $V(\lambda_1), V(\lambda_2)$ παρουσιάζουν το $(\mathbb{R}^2)$

Ας πάρουμε $(P_1, P_2) \in V(\lambda_1)$ και $(P_3, P_4) \in V(\lambda_2)$

Άρα είναι ιδιοδιανύσματα παρουσιάζουν το $(\mathbb{R}^2)$

$$\text{Οποτε } a_1 P_1 + a_2 P_2 = \lambda_1 P_1 \Leftrightarrow P_2 = -\frac{a_1 - \lambda_1}{a_2} P_1 \quad (a)$$

$$\text{Ομοίως } a_1 P_3 + a_2 P_4 = \lambda_2 P_3 \Rightarrow P_4 = -\frac{a_1 - \lambda_2}{a_2} P_3 \quad (b)$$

Ποσ/ζω τις (a) (b) και θέτω και έχουμε:

$$\begin{aligned} P_2 P_4 &= \frac{(a_1 - \lambda_1)(a_1 - \lambda_2)}{a_2^2} P_1 P_3 = \frac{a_1^2 - a_1 \lambda_2 - a_1 \lambda_1 + \lambda_1 \lambda_2}{a_2^2} P_1 P_3 = \\ &= \frac{a_1^2 - a_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2}{a_2^2} P_1 P_3 = \frac{a_1^2 - a_1(a_1 + a_3) + a_1 a_3 - a_2^2}{a_2^2} P_1 P_3 = \\ &= \frac{a_1^2 - a_1^2 - a_1 a_3 + a_1 a_3 - a_2^2}{a_2^2} P_1 P_3 = -P_1 P_3 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } P_1 P_3 + P_2 P_4 = 0 \Leftrightarrow \langle (P_1, P_2), (P_3, P_4) \rangle = 0 \Rightarrow$$

~~Τα~~ Τα $P^{(1)} = (P_1, P_2)$ και $P^{(2)} = (P_3, P_4)$ είναι κάθετα

$$P_1^2 + P_2^2 = 1 \Leftrightarrow \|P^{(1)}\| = 1$$

$$P_3^2 + P_4^2 = 1 \Leftrightarrow \|P^{(2)}\| = 1$$

Υπάρχουν 4 συνιστώσες για το $P^{(1)}$ και 4 για το $P^{(2)}$ ώστε να έχω μέτρο 2

~~Προσ~~ Συνολός υπάρχουν 16 Σωστές επιλογές για τα $P^{(1)}, P^{(2)}$ ώστε να έχουμε μέτρο 1 και τα 2

$$P \cdot P^t = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_3 \\ p_2 & p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & p_1 p_3 + p_2 p_4 \\ p_1 p_3 + p_2 p_4 & p_3^2 + p_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Άρα $P^{-1} = P^t \Rightarrow$ P ορθογώνιος πίνακας

Γενικά ένας πίνακας $P \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ που ικανοποιεί την σχέση $PP^t = I \Leftrightarrow P^t = P^{-1}$ ονομάζεται ορθογώνιος πίνακας

Δείξτε ότι για τυχόντα ορθογώνιο πίνακα $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P π.ω. $PAP^{-1} = A$

